**ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

**1. Определение преобразования Лапласа и его свойства.**

**Определение 1.1.** Пустьфункция удовлетворяет условиям:

1)

на любом конечном интервале она имеет конечное число точек строгого экстремума и может иметь только конечное число точек разрыва, причем только первого рода (условия Дирихле);

3) функция удовлетворяет условию роста с некоторыми положительными константами

Всякая такая функция называется *оригиналом.*

**Определение 1.2.** Пустьфункция оригинал. Тогда её преобразованием Лапласа называется

, (1.1)

где комплексный параметр, причём ; из условия роста 3).

Условие нужно для сходимости несобственного интеграла (1.1).

Поскольку по определению , то

И из условия следует сходимость интегралов в правой части последнего равенства.

Очевидно, что преобразование Лапласа обладает свойством линейности:

.

Интеграл (1.1) представляет собой функцию комплексного аргумента и называется изображением оригинала

.

То обстоятельство, что функции составляют пару оригинал – изображение, будем обозначать следующим знаком соответствия: .

Строго говоря, обращение с функциями комплексного аргумента требует определенных знаний из области теории функций комплексной переменной. Но, оказывается, что если обращаться с переменной как с вещественной положительной (в силу условия , то всё будет получаться верно. Ниже мы так и будем поступать. При этом для всех подынтегральных функций значения первообразных на будут равны нулю.

**2. Основные теоремы операционного исчисления.**

**Таблица оригиналов и изображений.**

Введём в рассмотрение функцию Хевисайда:

В интеграле (1.1) функция представлена своими значениями для Казалось бы, значения функции при не влияют на изображение. Но оказывается, что в определённых вопросах то, что , сказывается. В этом мы скоро убедимся при обсуждении теоремы запаздывания. Поэтому, говоря о всякой функции как оригинале, строго говоря, нужно понимать эту функцию, умноженную на функцию Хевисайда.

Нам ниже понадобится функция

Начнём вывод таблицы оригиналов и изображений.

**Теорема 2.1.** .

*Доказательство.* Какбыло сказано выше, будем обращаться с переменной , как с положительным вещественным параметром:

**Теорема 2.2.** .

*Доказательство.* Поскольку

,

то

=

Аналогичным образом доказывается второе утверждение теоремы.

Для запоминания таблицы оригиналов и изображений нужно помнить только изображения, полученные в теоремах 2.1 и 2.2. Остальные изображения выводятся по теоремам, изложенным ниже.

**Теорема 2.3 (смещения).** Если , то .

*Доказательство.*

Из теорем 1.1 и 1.3 вытекает очевидное

**Следствие 2.1.** .

**Теорема 2.4 (подобия).** Если то ,

*Доказательство.*

Из теорем 2.2 и 2.4 вытекает

**Следствие 2.2.** ,

Из теоремы 1.1 и следствия 1.2 вытекает

**Следствие 2.3.**

**Теорема 2.5 (запаздывания).** Если , то

,

*Доказательство.*

Поскольку , то при . Тогда

Заметим, что при доказательстве теоремы 2.5 было использовано условие

**Теорема 2.6 (о дифференцировании оригинала).** Если то

*Доказательство.*

Из теоремы 2.6 легко вывести следующее

**Следствие 2.4.** Если то

*.*

Приведем пример, для чего, в частности, применяется преобразование Лапласа.

**Пример 2.1.** Найти функцию являющуюся решением задачи Коши

*Решение.* Пусть , тогда по теореме 1.5

В обеих частях уравнения осуществим преобразование Лапласа. В силу линейности преобразования Лапласа и поскольку получим:

Отсюда находим: По следствию 2.1 . Если – единственный оригинал, изображение которого равно то и есть решение исходной задачи.

Оказывается, что, действительно, имеет место

**Теорема 2.7 ( единственности).** Пусть и , тогда для всех значений , для которых обе функции непрерывны.

Продолжим изложение теорем, позволяющих пополнить таблицу оригиналов и изображений.

**Теорема 2.8 (о дифференцировании изображения).**

Пусть , тогда .

*Доказательство.* Продифференцируем обе части этого равенства по переменной . Поскольку при достаточно широких условиях на подынтегральную функцию правомерно вносить оператор дифференцирования по параметру под знак интеграла, то получим:

.

**Следствие 2.5.** Пусть , тогда ,

Из теоремы 2.1, теоремы 2.7 и следствия 1.5 вытекает

**Следствие 2.6.** ;,

Из следствия 2.5 и теоремы смещения получим

**Следствие 2.7.** ; ,

В любом пособии по операционному исчислению есть таблица оригиналов и изображений. Мы её вывели в достаточной для нас полноте.

**3. Нахождение изображений по оригиналам и оригиналов по изображениям.**

Всюду ниже через обозначен оригинал, а через - изображение.

**Пример 3.1.**  Найти

*Решение.* 1) Первый способ. По определению

2) Второй способ. Нетрудно понять, что функцию можно представить в виде: (теорема 1.1). По теореме запаздывания . Тогда в силу линейности преобразования Лапласа получим: .

**Пример 3.2.**  Найти

*Решение.* Можно, конечно, решить задачу непосредственным интегрированием, как в предыдущем примере, но тогда придётся произведение интегрировать по частям. Поэтому решим задачу с помощью теоремы запаздывания. Функцию можно представить в виде

Тогда (см. следствие 1.5),

(см. теорему запаздывания). В силу линейности преобразования Лапласа получим:

**Пример 3.3.** . Найти

*Решение.* (см. следствие 1.2); тогда по теореме смещения =.

**Пример 3.4.** . Найти

*Решение.* По формуле понижения степени

.

**Пример 3.5.** . Найти

*Решение.* Воспользовавшись известной формулой из тригонометрии, получим:

.

**Пример 3.6.** . Найти

*Решение.* , ,

Тогда по теореме запаздывания получим:

*=.*

Займёмся нахождением оригиналов рациональных дробей.

Для нахождения оригинала рациональной дроби нужно сначала разложить её на сумму простейших дробей.

Оригиналы простейших дробей первого и второго видов находятся по формулам из следствий 2.1 и 2.6:

.

Нахождение оригинала простейшей дроби третьего вида рассмотрим на примере.

**Пример 3.7.** . Найти

*Решение.* Дискриминант знаменателя дроби отрицательный, следовательно, это – простейшая дробь третьего вида. Выделив в знаменателе дроби полный квадрат, получим:

=

(см. следствие 1.3).

Разложение дробей на сумму простейших, знакомое из интегрирования рациональных дробей, повторим при решении дифференциальных уравнений.

**Задачи для самостоятельного решения.**

Найти изображения оригиналов:

1) ,2) , 3) , 6) .

Найти оригиналы изображений :

1) *F(p)=* 2) , 3) ,

4) *F(p)=* 5) , 6) .

**4. Решение дифференциальных уравнений.**

**Пример 4.1.** Решить задачу Коши ,

*Решение.* Пусть , тогда

*.*

Осуществим в обеих частях уравнения преобразование Лапласа, или, как говорят, перейдем в пространство изображений. Тогда получим:

*.*

Разложим последнюю дробь на сумму простейших.

*.* Тогда

++.

Найдя решение, рекомендуется проверить, выполнены ли начальные условия.

**Пример 4.2.** Решить задачу Коши ,

*Решение.* Пусть , тогда

*.*Перейдя в пространство изображений, получим:

.

Разложим последнюю дробь на сумму простейших.

Тогда

**Пример 4.3.** Решить задачу Коши ,

*Решение.* Пусть , тогда

*.*

Перейдем в пространство изображений. Тогда получим:

*.*

Разложим последнюю дробь на сумму простейших.

Легко проверить, что начальные условия выполнены, следовательно, коэффициенты найдены верно.

**5. Теорема о свёртке и теорема об интегрировании оригинала.**

**Определение 5.1.** Свёрткой функций и называется

.

Несмотря на то, что функции и входят в свёртку несимметричным образом, нетрудно доказать, что справедливо равенство

**Теорема 5.1 (о свёртке).** Пусть и . Тогда . (5.1)

*Доказательство.* Докажем равенство (5.1) справа налево. Имеем:

}=

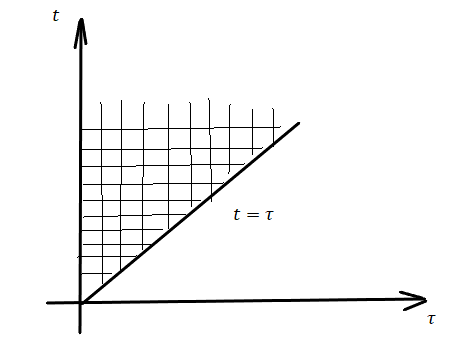
**

Рис. 1

Поясним, что при осуществлении выкладок сначала был изменён порядок интегрирования (см. рис 1), затем сделана замена переменной (с пересчётом пределов).

Положим в теореме 2.1 ;в силу того, что тогда получим следующее

**Следствие 5.1 (теорема об интегрировании оригинала).** Пусть . Тогда .

**Пример 5.1.**  Найти

*Решение. , t.* Следовательно, по теореме о свёртке

**Замечание 5.1.** Заметим, что ниже в примере 7.1 с помощью теоремы о свёртке вычисляется оригинал изображения

**Задачи для самостоятельного решения.**

Решить задачи Коши:

1) , 2) ,

;

5) ,

**6. Решение интегральных уравнений Вольтерра.**

Рассмотрим уравнение вида

где и - заданные функции, а - искомая функция. Такое уравнение называется уравнением Вольтерра типа свёртки.

Положим Тогда по теореме о свёртке Перейдя в пространство изображений, получим уравнение откуда находим

*.* Тогда

**Пример 6.1.** Решить уравнение

*Решение.* Положим . По определению

(гиперболический синус), и, следовательно,

. По теореме о свёртке

Перейдя в пространство изображений, получим:

)

**Задачи для самостоятельного решения.**

1) ,

4) ;

6) .

**6. Теорема об интегрировании изображения.**

**Теорема 6.1.** Если и функция является оригиналом, то

Доказательство теоремы опустим ( хотя оно не является сложным), поскольку для полного его понимания нужно знать, что такое интеграл от функции комплексной переменной. Мы же ограничимся тем, что, как было сказано выше, если обращаться с комплексной переменной , как с вещественной положительной, то всё будет получаться верно.

И ещё заметим, что если при умножении оригинала на изображение дифференцируется (с изменением знака), то естественно, что при делении на - интегрируется.

**Пример 6.1.** Найти изображение оригинала

*Решение. .*Тогда по теореме 6.1

*.*

**7. Решение дифференциальных уравнений с помощью формулы Дюамеля.**

Справедлива следующая *формула Лейбница дифференцирования* *интеграла по параметру*: если

*,* (7.1)

то

(7.2)

Введём для правой части формулы (5.1) обозначение:

где Тогда по формуле (7.2)

.

Поскольку и , то по теореме о дифференцировании оригинала получим:

то есть

(7.3)

Соотношение (7.3) называется формулой Дюамеля.

Покажем, как с помощью формулы Дюамеля решается задача Коши с нулевыми начальными условиями для дифференциального уравнения

(7.4)

с такой функцией , изображение которой найти затруднительно. Покажем, как можно обойти эту трудность.

Если то Осуществив в обеих частях уравнения (7.4)преобразование Лапласа, получим равенство

откуда

. (7.5)

Рассмотрим теперь задачу Коши

(7.6)

Положим тогда . Поскольку , то, осуществив преобразование Лапласа в обеих частях уравнения (7.6), получим:

. (7.7)

Тогда решение задаётся соотношением

. (7.8)

Поделив почленно левые и правые части равенств (7.5) и (7.7) друг на друга, получим:

, откуда .

Но тогда по формуле Дюамеля

. (7.9)

То есть решение задачи (7.4) равно свёртке функции с производной решения задачи (7.6). Таким образом, нет необходимости в вычислении изображения функции .

**Пример 7.1.** Решить задачу Коши

(7.10)

*Решение.* Рассмотрим вспомогательную задачу Коши

(7.11)

Положим тогда . Поскольку , то, осуществив преобразование Лапласа в обеих частях уравнения (711), получим:

.

Оригинал этого изображения легко найти, разложив дробь на сумму простейших дробей в виде

.

Поскольку выше было приведено достаточно примеров с разложением дробей на сумму простейших дробей, покажем, как можно найти оригинал с помощью теоремы о свёртке.

Имеем:, . Тогда по теореме о свёртке

=

=

Отсюда получим:

Тогда по формуле (7.9) получим:

=

=+.

Для вычисления последнего интеграла разложим дробь на сумму простейших дробей. Имеем:

=

==

Тогда

***Варианты контрольной работы.***

Вариант 1 Вариант 2

1.Найти изображения оригиналов: 1.Найти изображения оригиналов:

а) а)

б) б)

2.Найти оригиналы изображений: 2.Найти оригиналы изображений:

а) а) ;

б) . б) .

3. Решить задачу Коши: 3. Решить задачу Коши:

, ,

4.Решить интегральное уравнение: 4.Решить интегральное уравнение:

Вариант 3 Вариант 4

1.Найти изображения оригиналов: 1.Найти изображения оригиналов:

а) а)

б) б)

2.Найти оригиналы изображений: 2.Найти оригиналы изображений:

а) а) ;

б) . б) .

3. Решить задачу Коши: 3. Решить задачу Коши:

, ,

4.Решить интегральное уравнение: 4.Решить интегральное уравнение:

Вариант 5 Вариант 6

1.Найти изображения оригиналов: 1.Найти изображения оригиналов:

а) а)

б) б)

2.Найти оригиналы изображений: 2.Найти оригиналы изображений:

а) а) ;

б) . б) .

3. Решить задачу Коши: 3. Решить задачу Коши:

, ,

4.Решить интегральное уравнение: 4.Решить интегральное уравнение:

Вариант 7 Вариант 8

1.Найти изображения оригиналов: 1.Найти изображения оригиналов:

а) а)

б) б)

2.Найти оригиналы изображений: 2.Найти оригиналы изображений:

а) а) ;

б) . б) .

3. Решить задачу Коши: 3. Решить задачу Коши:

, ,

4.Решить интегральное уравнение: 4.Решить интегральное уравнение:

Вариант 9 Вариант 10

1.Найти изображения оригиналов: 1.Найти изображения оригиналов:

а) а)

б) б)

2.Найти оригиналы изображений: 2.Найти оригиналы изображений:

а) а) ;

б) . б) .

3. Решить задачу Коши: 3. Решить задачу Коши:

, ,

4.Решить интегральное уравнение: 4.Решить интегральное уравнение:

Вариант 11 Вариант 12

1.Найти изображения оригиналов: 1.Найти изображения оригиналов:

а) а)

б) б)

2.Найти оригиналы изображений: 2.Найти оригиналы изображений:

а) а) ;

б) . б) .

3. Решить задачу Коши: 3. Решить задачу Коши:

, ,

4.Решить интегральное уравнение: 4.Решить интегральное уравнение:

Вариант 13 Вариант 14

1.Найти изображения оригиналов: 1.Найти изображения оригиналов:

а) а)

б) б)

2.Найти оригиналы изображений: 2.Найти оригиналы изображений:

а) а) ;

б) . б) .

3. Решить задачу Коши: 3. Решить задачу Коши:

, ,

4.Решить интегральное уравнение: 4.Решить интегральное уравнение:

Вариант 15 Вариант 16

1.Найти изображения оригиналов: 1.Найти изображения оригиналов:

а) а)

б) б)

2.Найти оригиналы изображений: 2.Найти оригиналы изображений:

а) а) ;

б) . б) .

3. Решить задачу Коши: 3. Решить задачу Коши:

, ,

4.Решить интегральное уравнение: 4.Решить интегральное уравнение:

Вариант 17 Вариант 18

1.Найти изображения оригиналов: 1.Найти изображения оригиналов:

а) а)

б) б)

2.Найти оригиналы изображений: 2.Найти оригиналы изображений:

а) а) ;

б) . б) .

3. Решить задачу Коши: 3. Решить задачу Коши:

, ,

4.Решить интегральное уравнение: 4.Решить интегральное уравнение:

Вариант 21 Вариант 22

1.Найти изображения оригиналов: 1.Найти изображения оригиналов:

а) а)

б) б)

2.Найти оригиналы изображений: 2.Найти оригиналы изображений:

а) а) ;

б) . б) .

3. Решить задачу Коши: 3. Решить задачу Коши:

, ,

4.Решить интегральное уравнение: 4.Решить интегральное уравнение:

Вариант 19 Вариант 20

1.Найти изображения оригиналов: 1.Найти изображения оригиналов:

а) а)

б) б)

2.Найти оригиналы изображений: 2.Найти оригиналы изображений:

а) а) ;

б) . б) .

3. Решить задачу Коши: 3. Решить задачу Коши:

, ,

4.Решить интегральное уравнение: 4.Решить интегральное уравнение:

Вариант 23 Вариант 24

1.Найти изображения оригиналов: 1.Найти изображения оригиналов:

а) а)

б) б)

2.Найти оригиналы изображений: 2.Найти оригиналы изображений:

а) а) ;

б) . б) .

3. Решить задачу Коши: 3. Решить задачу Коши:

, ,

4.Решить интегральное уравнение: 4.Решить интегральное уравнение:

Вариант 25 Вариант 26

1.Найти изображения оригиналов: 1.Найти изображения оригиналов:

а) а)

б) б)

2.Найти оригиналы изображений: 2.Найти оригиналы изображений:

а) а) ;

б) . б) .

3. Решить задачу Коши: 3. Решить задачу Коши:

, ,

4.Решить интегральное уравнение: 4.Решить интегральное уравнение:

Вариант 27 Вариант 28

1.Найти изображения оригиналов: 1.Найти изображения оригиналов:

а) а)

б) б)

2.Найти оригиналы изображений: 2.Найти оригиналы изображений:

а) а) ;

б) . б) .

3. Решить задачу Коши: 3. Решить задачу Коши:

, ,

4.Решить интегральное уравнение: 4.Решить интегральное уравнение:

Вариант 29 Вариант 30

1.Найти изображения оригиналов: 1.Найти изображения оригиналов:

а) а)

б) б)

2.Найти оригиналы изображений: 2.Найти оригиналы изображений:

а) а) ;

б) . б) .

3. Решить задачу Коши: 3. Решить задачу Коши:

, ,

4.Решить интегральное уравнение: 4.Решить интегральное уравнение: